

Исходные данные:

$$E_2 = 30 \text{ (В)}$$

$$E_3 = 40 \text{ (В)}$$

$$E_4 = 50 \text{ (В)}$$

$$E_5 = 60 \text{ (В)}$$

$$E_6 = 20 \text{ (В)}$$

$$R_1 = 2 \text{ (Ом)}$$

$$R_2 = 3 \text{ (Ом)}$$

$$R_3 = 4 \text{ (Ом)}$$

$$R_4 = 6 \text{ (Ом)}$$

$$R_5 = 4 \text{ (Ом)}$$

$$R_6 = 4 \text{ (Ом)}$$

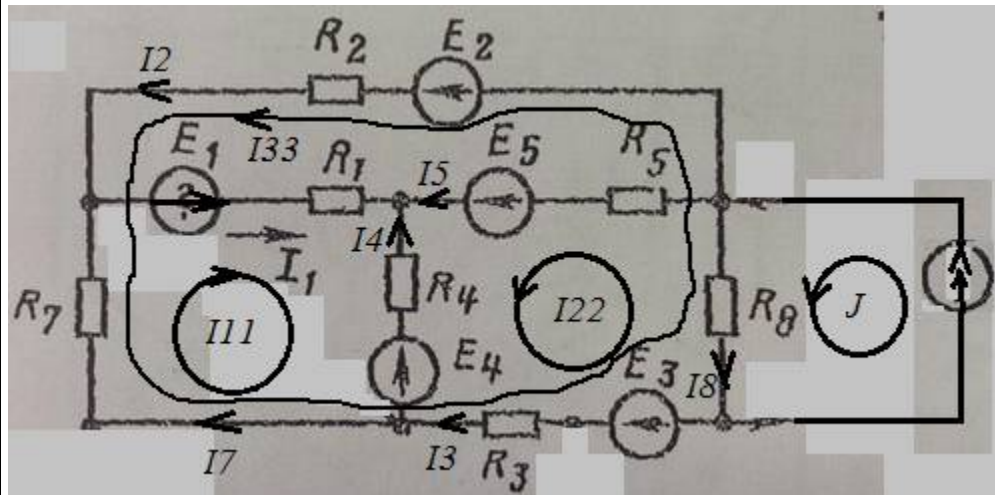
$$R_7 = 7 \text{ (Ом)}$$

$$R_8 = 8 \text{ (Ом)}$$

$$J = 4 \text{ (А)}$$

$$I_1 = 2 \text{ (А)}$$

Схема электрической цепи:



Количество узлов: $Y = 5$

Количество ветвей: $B = 8$

Количество ветвей с источником тока: $B_J = 1$

Количество уравнений по 1 Закону Кирхгофа: $Y - 1 = 4$

Количество уравнений по 2 Закону Кирхгофа: $B - B_J - (Y - 1) = 3$

1. Система уравнений по 1 Закону Кирхгофа:

$$I_4 + I_1 + I_5 = 0$$

$$I_8 - I_3 - J = 0$$

$$I_4 - I_3 + I_7 = 0$$

$$I_7 + I_2 - I_1 = 0$$

Система уравнений по 2 Закону Кирхгофа:

$$I_1 \cdot R_1 - I_4 \cdot R_4 + I_7 \cdot R_7 = E_1 - E_4$$

$$-I_3 \cdot R_3 - I_8 \cdot R_8 - I_4 \cdot R_4 = E_5 - E_4 - E_3$$

$$I_2 \cdot R_2 - I_7 \cdot R_7 - I_3 \cdot R_3 - I_8 \cdot R_8 = E_2 - E_3$$

2. Система уравнений по методу контурных токов:

$$I_{11} \cdot (R_1 + R_7 + R_4) + I_{22} \cdot R_4 - I_{33} \cdot R_7 = E_1 - E_4$$

$$I_{22} \cdot (R_5 + R_4 + R_3 + R_8) + I_{11} \cdot R_4 + I_{33} \cdot (R_3 + R_8) = J \cdot R_8 + E_5 - E_4 - E_3$$

$$I_{33} \cdot (R_2 + R_7 + R_3 + R_8) - I_{11} \cdot R_7 + I_{22} \cdot (R_3 + R_8) = J \cdot R_8 + E_2 - E_3$$

$$\begin{aligned}
 -E_1 + I_{22} \cdot R_4 - I_{33} \cdot R_7 &= -I_{11} \cdot (R_1 + R_7 + R_4) - E_4 \\
 I_{22} \cdot (R_5 + R_4 + R_3 + R_8) + I_{33} \cdot (R_3 + R_8) &= -I_{11} \cdot R_4 + J \cdot R_8 + E_5 - E_4 - E_3 \\
 I_{33} \cdot (R_2 + R_7 + R_3 + R_8) + I_{22} \cdot (R_3 + R_8) &= I_{11} \cdot R_7 + J \cdot R_8 + E_2 - E_3
 \end{aligned}$$

$$I_{11} = I_1 = 2 \quad (A)$$

Матрица сопротивлений (коэффициенты при E_1, I_{22}, I_{33}), Ом:

$$R_K = \begin{pmatrix} -1 & R_4 & -R_7 \\ 0 & R_5 + R_4 + R_3 + R_8 & R_3 + R_8 \\ 0 & R_3 + R_8 & R_2 + R_7 + R_3 + R_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -7 \\ 0 & 4 + 6 + 4 + 8 & 4 + 8 \\ 0 & 4 + 8 & 3 + 7 + 4 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -7 \\ 0 & 22 & 12 \\ 0 & 12 & 22 \end{pmatrix}$$

Матрица ЭДС контуров, В:

$$E_K = \begin{bmatrix} -I_{11} \cdot (R_1 + R_7 + R_4) - E_4 \\ -I_{11} \cdot R_4 + J \cdot R_8 + E_5 - E_4 - E_3 \\ I_{11} \cdot R_7 + J \cdot R_8 + E_2 - E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot (2 + 7 + 6) - 50 \\ -2 \cdot 6 + 4 \cdot 8 + 60 - 50 - 40 \\ 2 \cdot 7 + 4 \cdot 8 + 30 - 40 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -80 \\ -10 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Решим систему линейных уравнений методом Крамера:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -7 & -80 \\ 0 & 22 & 12 & -10 \\ 0 & 12 & 22 & 36 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -7 \\ 0 & 22 & 12 \\ 0 & 12 & 22 \end{pmatrix} \quad |\Delta| = -340$$

$$\Delta_{11} = \begin{pmatrix} -80 & 6 & -7 \\ -10 & 22 & 12 \\ 36 & 12 & 22 \end{pmatrix} \quad |\Delta_{11}| = -16904$$

$$\Delta_{22} = \begin{pmatrix} -1 & -80 & -7 \\ 0 & -10 & 12 \\ 0 & 36 & 22 \end{pmatrix} \quad |\Delta_{22}| = 652$$

$$\Delta_{33} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -80 \\ 0 & 22 & -10 \\ 0 & 12 & 36 \end{pmatrix} \quad |\Delta_{33}| = -912$$

Контурные токи и E_1 :

$$E_1 = \frac{|\Delta_{11}|}{|\Delta|} = 49.718 \quad (B)$$

$$I_{22} = \frac{|\Delta_{22}|}{|\Delta|} = -1.918 \quad (A)$$

$$I_{33} = \frac{|\Delta_{33}|}{|\Delta|} = 2.682 \quad (A)$$

Токи в ветвях схемы, А:

$$I_1 = 2 \quad (A)$$

$$I_2 = I_{33} = 2.682 \quad (A)$$

$$I_3 = -I_{22} - I_{33} = - -1.918 - 2.682 = -0.765 \quad (A)$$

$$I_4 = -I_{22} - I_{11} = -0.082 \quad (A)$$

$$I_5 = I_{22} = -1.918 \quad (A)$$

$$I_7 = I_{11} - I_{33} = 2 - 2.682 = -0.682 \quad (A)$$

$$I_8 = J - I_{22} - I_{33} = 4 - -1.918 - 2.682 = 3.235 \quad (A)$$

Показания вольтметров:

$$pV_1 = |I_3 \cdot R_3 - E_6| = |-0.765 \cdot 4 - 20| = 23.059 \quad (B)$$

$$pV_2 = |I_7 \cdot R_7| = |-0.682 \cdot 7| = 4.776 \quad (B)$$

Проверим правильность найденных токов с помощью законов Кирхгофа:

Система уравнений по 1 Закону Кирхгофа:

$$I_4 + I_1 + I_5 = -0.082 + 2 + -1.918 = 0$$

$$I_8 - I_3 - J = 3.235 - -0.765 - 4 = 0$$

$$I_4 - I_3 + I_7 = -0.082 - -0.765 + -0.682 = 0$$

$$I_7 + I_2 - I_1 = -0.682 + 2.682 - 2 = 0$$

Система уравнений по 2 Закону Кирхгофа:

$$I_1 \cdot R_1 - I_4 \cdot R_4 + I_7 \cdot R_7 = 2 \cdot 2 - -0.082 \cdot 6 + -0.682 \cdot 7 = -0.282$$

$$E_1 - E_4 = 49.718 - 50 = -0.282$$

$$-I_3 \cdot R_3 - I_8 \cdot R_8 - I_4 \cdot R_4 + I_5 \cdot R_5 = (- -0.765) \cdot 4 - 3.235 \cdot 8 - -0.082 \cdot 6 + -1.918 \cdot 4 = -30$$

$$E_5 - E_4 - E_3 = 60 - 50 - 40 = -30$$

$$I_2 \cdot R_2 - I_7 \cdot R_7 - I_3 \cdot R_3 - I_8 \cdot R_8 = 2.682 \cdot 3 - -0.682 \cdot 7 - -0.765 \cdot 4 - 3.235 \cdot 8 = -10$$

$$E_2 - E_3 = 30 - 40 = -10$$

5. Проверка баланса мощностей для исходной схемы:

$$U_J = I_8 \cdot R_8 = 3.235 \cdot 8 = 25.882 \quad (B)$$

$$P_{номр} = I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3 + I_4^2 \cdot R_4 + I_5^2 \cdot R_5 + I_7^2 \cdot R_7 + I_8^2 \cdot R_8$$

$$P_{номр} = 2^2 \cdot 2 + 2.682^2 \cdot 3 + (-0.765)^2 \cdot 4 + (-0.082)^2 \cdot 6 + (-1.918)^2 \cdot 4 + (-0.682)^2 \cdot 7 + 3.235^2 \cdot 8 = 133.671 \quad (Bm)$$

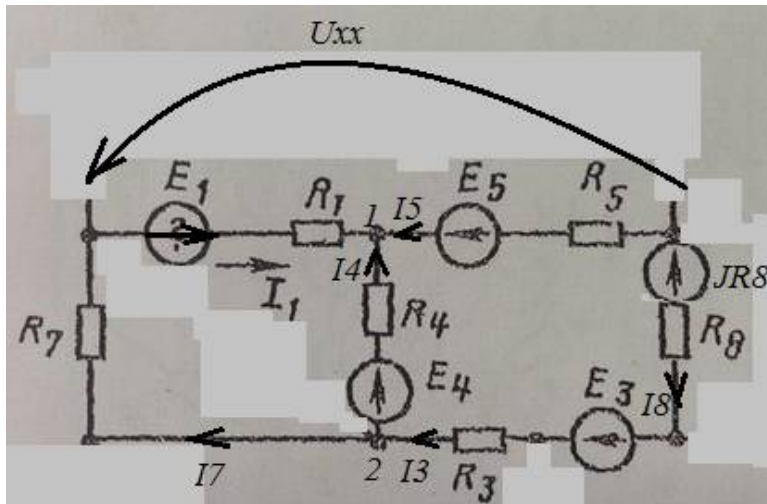
$$P_{уст} = E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3 + E_4 \cdot I_4 + E_5 \cdot I_5 + J \cdot U_J$$

$$P_{уст} = 49.718 \cdot 2 + 30 \cdot 2.682 + 40 \cdot -0.765 + 50 \cdot -0.082 + 60 \cdot -1.918 + 4 \cdot 25.882 = 133.671 \quad (Bm)$$

Баланс мощностей сошелся, следовательно токи в схеме найдены верно

Решение методом эквивалентного генератора (ток I_2):

Найдем токи в режиме холостого хода с применением метода двух узлов:



Решение методом двух узлов:

$$U_{12} = \frac{\frac{E_1}{R_1 + R_7} + \frac{E_4}{R_4} + \frac{J \cdot R_8 + E_5 - E_3}{R_5 + R_8 + R_3}}{\frac{1}{R_1 + R_7} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5 + R_8 + R_3}} = \frac{\frac{49.718}{2+7} + \frac{50}{6} + \frac{4 \cdot 8 + 60 - 40}{4+8+4}}{\frac{1}{2+7} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4+8+4}} = 50.275 \quad (B)$$

Токи в ветвях схемы, А:

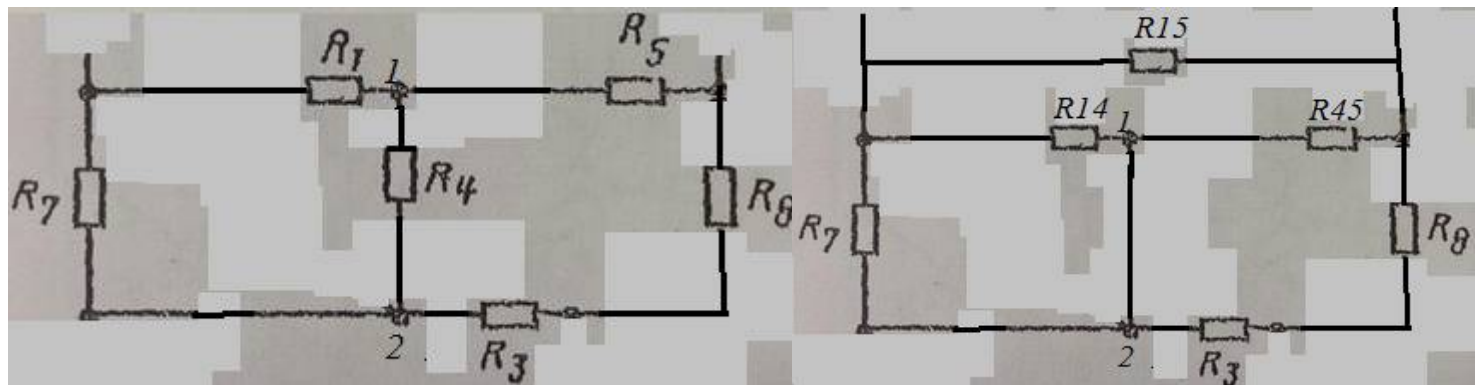
$$I_{5xx} = \frac{-U_{12} + J \cdot R_8 + E_5 - E_3}{R_5 + R_8 + R_3} = \frac{-50.275 + 4 \cdot 8 + 60 - 40}{4 + 8 + 4} = 0.108 \quad I_{3xx} = -I_{5xx} = -0.108 \quad (A)$$

$$I_{1xx} = \frac{-U_{12} + E_1}{R_7 + R_1} = \frac{-50.275 + 49.718}{7 + 2} = -0.062 \quad (A) \quad I_{7xx} = I_{1xx} = -0.062 \quad (A)$$

$$U_{xx} = I_{5xx} \cdot R_5 - E_5 + E_1 - I_{1xx} \cdot R_1 = 0.108 \cdot 4 - 60 + 49.718 - (-0.062 \cdot 2) = -9.727 \quad (B)$$

$$U'_{xx} = I_{7xx} \cdot R_7 - E_3 + I_{3xx} \cdot (R_8 + R_3) + J \cdot R_8 = -0.062 \cdot 7 - 40 + (-0.108 \cdot (8 + 4)) + 4 \cdot 8 = -9.727 \quad (B)$$

Общее сопротивление:



$$R_{38} = R_3 + R_8 = 4 + 8 = 12 \quad (Om)$$

$$R_{14} = R_1 + R_4 + \frac{R_1 \cdot R_4}{R_5} = 2 + 6 + \frac{2 \cdot 6}{4} = 11 \quad (Om)$$

$$R_{15} = R_1 + R_5 + \frac{R_1 \cdot R_5}{R_4} = 2 + 4 + \frac{2 \cdot 4}{6} = 7.333 \quad (Ом)$$

$$R_{45} = R_4 + R_5 + \frac{R_4 \cdot R_5}{R_1} = 6 + 4 + \frac{6 \cdot 4}{2} = 22 \quad (Ом)$$

$$R'_{экв} = \frac{R_{14} \cdot R_7}{R_{14} + R_7} + \frac{R_{38} \cdot R_{45}}{R_{38} + R_{45}} = \frac{11 \cdot 7}{11 + 7} + \frac{12 \cdot 22}{12 + 22} = 12.042 \quad (Ом)$$

$$R_{экв} = \frac{R'_{экв} \cdot R_{15}}{R'_{экв} + R_{15}} = \frac{12.042 \cdot 7.333}{12.042 + 7.333} = 4.558 \quad (Ом)$$

$$I_2 = \frac{U_{xx} + E_2}{R_2 + R_{экв}} = \frac{-9.727 + 30}{3 + 4.558} = 2.682 \quad (А)$$

Определим величину и направление ЭДС, которую необходимо дополнительно включить во вторую ветвь, чтобы ток в ней увеличился в два раза и изменил свое направление:

$$I'_2 = \frac{U_{xx} + E_2}{R_2 + R_{экв}}$$

$$I'_2 = -2I_2 = -2 \cdot 2.682 = -5.365 \quad (А)$$

$$E_{доб} = I'_2 \cdot (R_2 + R_{экв}) - (U_{xx} + E_2) = -5.365 \cdot (3 + 4.558) - (-9.727 + 30) = -60.818 \quad (В)$$

Выполним проверку:

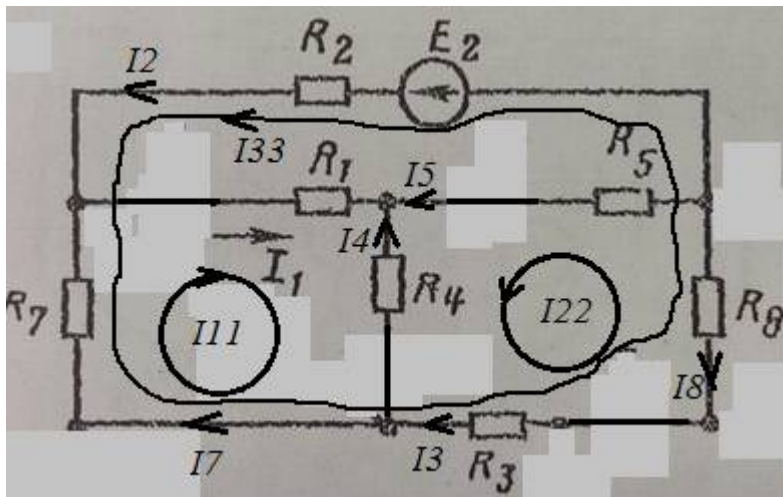
$$I'_{.2} = \frac{U_{xx} + E_2 + E_{доб}}{R_2 + R_{экв}} = \frac{-9.727 + 30 + -60.818}{3 + 4.558} = -5.365 \quad (А)$$

Определим входную проводимость второй ветви:

$$G_{22} = \frac{I}{R_{экв} + R_2} = \frac{I}{4.558 + 3} = 0.132 \quad (См)$$

Определим взаимную проводимость второй и третьей ветви.

Для этого оставим в схеме источник ЭДС E_2 и рассчитаем токи методом контурных токов



Система уравнений по методу контурных токов для преобразованной схемы:

$$I_{11} \cdot (R_1 + R_7 + R_4) + I_{22} \cdot R_4 - I_{33} \cdot R_7 = 0$$

$$I_{22} \cdot (R_5 + R_4 + R_3 + R_8) + I_{11} \cdot R_4 + I_{33} \cdot (R_3 + R_8) = 0$$

$$I_{33} \cdot (R_2 + R_7 + R_3 + R_8) - I_{11} \cdot R_7 + I_{22} \cdot (R_3 + R_8) = E_2$$

Матрица сопротивлений (коэффициенты при I_{11}, I_{22}, I_{33}), Ом:

$$R_K = \begin{pmatrix} R_1 + R_7 + R_4 & R_4 & -R_7 \\ R_4 & R_5 + R_4 + R_3 + R_8 & R_3 + R_8 \\ -R_7 & R_3 + R_8 & R_2 + R_7 + R_3 + R_8 \end{pmatrix}$$

$$R_K = \begin{pmatrix} 2 + 7 + 6 & 6 & -7 \\ 6 & 4 + 6 + 4 + 8 & 4 + 8 \\ -7 & 4 + 8 & 3 + 7 + 4 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 6 & -7 \\ 6 & 22 & 12 \\ -7 & 12 & 22 \end{pmatrix}$$

Матрица ЭДС контуров, В:

$$E_K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Решим систему линейных уравнений методом Крамера:

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 6 & -7 & 0 \\ 6 & 22 & 12 & 0 \\ -7 & 12 & 22 & 30 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 15 & 6 & -7 \\ 6 & 22 & 12 \\ -7 & 12 & 22 \end{pmatrix} \quad |\Delta| = 2.222 \times 10^3$$

$$\Delta_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -7 \\ 0 & 22 & 12 \\ 30 & 12 & 22 \end{pmatrix} \quad |\Delta_{11}| = 6780$$

$$\Delta_{22} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -7 \\ 6 & 0 & 12 \\ -7 & 30 & 22 \end{pmatrix} \quad |\Delta_{22}| = -6.66 \times 10^3$$

$$\Delta_{33} = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 0 \\ 6 & 22 & 0 \\ -7 & 12 & 30 \end{pmatrix} \quad |\Delta_{33}| = 8820$$

Контурные токи и E_1 :

$$I'_{11} = \frac{|\Delta_{11}|}{|\Delta|} = 3.051 \quad (B)$$

$$I'_{22} = \frac{|\Delta_{22}|}{|\Delta|} = -2.997 \quad (A)$$

$$I'_{33} = \frac{|\Delta_{33}|}{|\Delta|} = 3.969 \quad (A)$$

Ток в третьей ветви преобразованной схемы, А:

$$I'_3 = -I'_{22} - I'_{33} = -0.972 \quad (A)$$

Взаимную проводимость второй и третьей ветвей вычисляем как отношение:

$$G_{23} = \frac{I'_3}{E_2} = \frac{-0.972}{30} = -0.032 \quad (Cм)$$

При уменьшении ЭДС второй ветви в два раза и увеличении ЭДС третьей ветви в три раза ток во второй ветви:

$$I_{2..} = \left[I_{7xx} \cdot R_7 - 3E_3 + I_{3xx} \cdot (R_8 + R_3) + J \cdot R_8 + \frac{E_2}{2} \right] \cdot G_{22}$$

$$I_{2..} = \left[-0.062 \cdot 7 - 3 \cdot 40 + -0.108 \cdot (8 + 4) + 4 \cdot 8 + \frac{30}{2} \right] \cdot 0.132 = -9.887 \quad (A)$$